

Matematică

clasa a IX-a

partea I

filierea teoretică: profil real (matematică-informatică, științe ale naturii)

filierea tehnologică: toate profilurile (tehnic, servicii, resurse naturale)

filierea vocațională: profil militar (matematică-informatică)



ALGEBRĂ	Capitolul 1. Mulțimea numerelor reale	
1.1.	Numere raționale și iraționale. Reprezentări zecimale	9
1.2.	Operații algebrice cu numere reale	12
1.3.	Formule de calcul prescurtat. Identități (extindere)	15
	<i>Teste de evaluare</i>	20
1.4.	Ordonarea numerelor reale	22
1.5.	Inegalități algebrice (extindere)	25
1.6.	Operații cu intervale de numere reale	29
	<i>Teste de evaluare</i>	32
1.7.	Modulul unui număr real	33
1.8.	Partea întregă și partea fracționară a unui număr real	36
1.9.	Aproximări ale numerelor reale	39
	<i>Teste de evaluare</i>	42
1.10.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	43
ALGEBRĂ	Capitolul 2. Elemente de logică matematică	
2.1.	Propoziție. Predicat. Operații logice elementare	49
2.2.	Raționament prin reducere la absurd	55
2.3.	Inducția matematică	57
	<i>Teste de evaluare</i>	60
2.4.	Mulțimi	61
2.5.	Probleme de numărare	65
	<i>Teste de evaluare</i>	68
2.6.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	69
ALGEBRĂ	Capitolul 3. Șiruri de numere reale	
3.1.	Șiruri de numere reale. Șiruri monotone. Șiruri mărginite	75
3.2.	Progresii aritmetice	78
3.3.	Progresii geometrice	80
3.4.	Probleme cu progresii aritmetice și geometrice	83
	<i>Teste de evaluare</i>	87
3.5.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	89
GEOMETRIE	Capitolul 4. Vectori în plan	
4.1.	Segment orientat. Relația de echipolență. Vectori	95
4.2.	Adunarea vectorilor	98

4.3. Înmulțirea vectorilor cu scalari	100
4.4. Descompunerea unui vector după doi vectori necoliniari	102
4.5. Reper cartezian în plan	105
<i>Teste de evaluare</i>	108

GEOMETRIE Capitolul 5. Concurență, coliniaritate, paralelism.

Calcul vectorial în geometria plană

5.1. Vectorul de poziție al unui punct. Teorema lui Thales	111
5.2. Centre de greutate. Relația lui Leibniz	115
5.3. Teorema bisectoarei. Vectorul de poziție al centrului cercului înscris într-un triunghi	118
5.4. Ortocentrul unui triunghi. Relația lui Sylvester	121
5.5. Teorema lui Menelau. Probleme de coliniaritate	124
5.6. Teorema lui Ceva. Probleme de concurență	127
<i>Teste de evaluare</i>	130
5.7. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	132

Capitolul 6. Variante de subiecte pentru evaluarea sumativă 137

SOLUȚII 143

Indice de autori 201

Bibliografie 202

Numere raționale și iraționale. Reprezentări zecimale

Notăm cu \mathbb{N} mulțimea numerelor naturale și cu \mathbb{Z} mulțimea numerelor întregi. Astfel, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ și $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ ($a, c \in \mathbb{Z}, b, d \in \mathbb{Z}^*$) se numesc *echivalente* dacă $ad = bc$; scriem

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Mulțimea tuturor fracțiilor echivalente cu o fracție dată se numește *număr rațional*.

Pentru simplificarea exprimării, vom identifica un număr rațional cu oricare dintre fracțiile echivalente care îl reprezintă. Mulțimea numerelor raționale se notează cu \mathbb{Q} . Așadar,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

Cu ajutorul algoritmului de împărțire a două numere naturale, orice fracție ordinară $\frac{p}{q}$ ($p \geq 0, q > 0$) se poate scrie sub formă de fracție zecimală periodică, cu perioada diferită de (9). Reciproc, orice fracție periodică, cu perioada diferită de (9), se poate scrie sub formă de fracție ordinară.

Dacă a este o *fracție periodică simplă*, adică are forma $a = a_0, (a_1 a_2 \dots a_p)$, unde $a_0 \in \mathbb{N}$ și $a_1, a_2, \dots, a_p \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, atunci

$$a = a_0 + \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_p}}{\underbrace{99 \dots 9}_{p \text{ ori}}}.$$

În cazul când a este *fracție periodică mixtă*, adică $a = a_0, a_1 a_2 \dots a_k (a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+p})$, avem

$$a = a_0 + \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_{k+p}} - \overline{a_1 a_2 \dots a_k}}{\underbrace{99 \dots 9}_{p \text{ ori}} \underbrace{00 \dots 0}_{k \text{ ori}}}.$$

\mathbb{Q} este mulțimea tuturor fracțiilor periodice (fracțiile zecimale finite sunt considerate fracții periodice cu perioada (0)).

Există fracții zecimale infinite și neperiodice, de exemplu $a = 0,1010010001\dots$.

O astfel de fracție zecimală se numește *număr irațional*.

Reunind mulțimea numerelor raționale cu mulțimea numerelor iraționale, obținem *mulțimea numerelor reale*, pe care o notăm cu \mathbb{R} . Așadar, \mathbb{R} este mulțimea tuturor fracțiilor zecimale, periodice sau neperiodice. Notăm $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Au loc incluziunile: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

1. a) Arătați că, pentru orice $m \in \mathbb{N}$, fracția $\frac{2m+1}{3m+2}$ este ireductibilă.
 b) Determinați $n \in \mathbb{N}$ pentru care fracția $\frac{n+2}{3n+1}$ este reductibilă.
2. Scrieți ca fracție zecimală fiecare dintre numerele:
 a) 5; b) $\frac{13}{8}$; c) $\frac{3}{4}$; d) $-\frac{3}{20}$; e) $\frac{14}{11}$;
 f) $\frac{481}{125}$; g) $-\frac{2}{3}$; h) $\frac{31}{13}$; i) $\frac{77}{75}$; j) $-\frac{47}{66}$.
3. Transformați în fracții ordinare următoarele fracții zecimale:
 a) 5,(7); b) -1,(13); c) 0,23(7); d) -1,01(02); e) -3,2(123).
4. Fie $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Este posibil ca a^2 și a^3 să fie numere raționale?
5. a) Aflați a $100 - a$ zecimală a numărului rațional $\frac{1}{13}$.
 b) Arătați că există un multiplu de 13 format numai cu cifra 1.
6. Fie $a \in \mathbb{Q}$ și $m, n \in \mathbb{N}^*$, $(m, n) = 1$. Arătați că, dacă $ma \in \mathbb{Z}$ și $na \in \mathbb{Z}$, atunci $a \in \mathbb{Z}$.
7. Arătați că, dacă o singură cifră din reprezentarea zecimală a unui număr real se repetă de o infinitate de ori, atunci numărul este rațional.
8. Arătați că un număr rațional pozitiv $\frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbb{N}^*$, $(p, q) = 1$) se reprezintă ca fracție zecimală finită dacă și numai dacă $q = 2^\alpha \cdot 5^\beta$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.



9. Se consideră numărul $a = 0,101001000100001\dots$.
 a) Arătați că a este număr irațional.
 b) Aflați a 1000-a zecimală a numărului a .
 c) Calculați suma primelor 1000 de zecimale ale numărului a .
10. a) Fie $x, y \in \mathbb{Q}$ și $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Arătați că $x + y \cdot a = 0$ dacă și numai dacă $x = y = 0$.
 b) Fie $x, y, z \in \mathbb{Q}$. Arătați că $x\sqrt{2} + y\sqrt{3} + z\sqrt{5} = 0$ dacă și numai dacă $x = y = z = 0$.
11. Demonstrați afirmațiile:
 a) dacă $r \in \mathbb{Q}$ și $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $r + a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
 b) dacă $r \in \mathbb{Q}^*$ și $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $ra \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
 c) dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $\frac{1}{a} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
 d) dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $a > 0$, atunci $\sqrt{a} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

12. Fie $n \in \mathbb{N}$. Arătați că:

a) $\sqrt{n} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n = k^2, k \in \mathbb{N}$;

b) $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt{n} \in \mathbb{N}$.

13. Arătați că există o infinitate de perechi (a, b) de numere iraționale cu $a + b \in \mathbb{Q}$ și $a \cdot b \in \mathbb{Q}$.

14. Arătați că numărul $\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$ este irațional.

15. Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, următoarele numere sunt iraționale:

a) $\sqrt{5^n + 2}$; b) $\sqrt{7n + 3}$; c) $\sqrt{n^2 + 5n + 7}$; d) $\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$.

16. Determinați numerele naturale k pentru care numărul $\sqrt{k^2 + 3k + 14}$ este rațional.

17. Fie mulțimea $M = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 - 3b^2 = 1\}$. Arătați că:

a) $2 + \sqrt{3} \in M$;

b) $x, y \in M \Rightarrow xy \in M$;

c) M este infinită.

18. a) Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că $\sqrt{m} + \sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ dacă și numai dacă $\sqrt{m}, \sqrt{n} \in \mathbb{N}$.

b) Determinați perechile (x, y) de numere naturale astfel încât $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 10\sqrt{3}$.

19. Fie $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ astfel încât $a + b \in \mathbb{Q}$ și $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$. Arătați că numerele $a - b$ și $ma + nb$ sunt iraționale.



20. Determinați $x, y \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0,58(3)$.

21. Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, numărul $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ este irațional.

22. Determinați numerele naturale n pentru care numărul $\sqrt{n+1} + \sqrt{4n+21}$ este rațional.

Operații algebrice cu numere reale

Calculul cu numere reale se bazează pe proprietățile adunării și înmulțirii numerelor reale.

Adunarea este operația prin care oricărei perechi de numere reale (x, y) i se asociază un număr real, notat cu $x + y$, numit *suma* numerelor x și y .

Proprietățile adunării

1. Adunarea este *asociativă*: $(a + b) + c = a + (b + c)$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$.
2. Adunarea este *comutativă*: $a + b = b + a$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.
3. Numărul real 0 este *element neutru* pentru adunare, adică oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, avem $a + 0 = 0 + a = a$.
4. Orice număr real a are un *opus*, adică există un număr real notat cu $-a$, astfel încât $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, se notează $x - y = x + (-y)$ *diferența* numerelor x și y .

Înmulțirea este operația prin care oricărei perechi de numere reale (x, y) i se asociază un număr real, notat cu $x \cdot y$ sau xy , numit *produsul* numerelor x și y .

Proprietățile înmulțirii

1. Înmulțirea este *asociativă*: $(ab)c = a(bc)$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$.
2. Înmulțirea este *comutativă*: $ab = ba$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.
3. Numărul real 1 este *element neutru* pentru înmulțire, adică oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, avem $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
4. Orice număr real $a \neq 0$ are un *invers*, adică există un număr real, notat cu a^{-1} , astfel încât $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$.
5. Înmulțirea este *distributivă față de adunare*, adică oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$, au loc egalitățile:

$$a(b + c) = ab + ac, \quad (a + b)c = ac + bc.$$

Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ și $y \neq 0$, se notează $\frac{x}{y} = xy^{-1}$ (*câtul* numerelor reale x și y).



1. Calculați $(-1)^n \cdot 0,1(3) + (-1)^{n+1} \cdot 0,1 + (-1)^{n+2} \cdot \frac{7}{6} + (-1)^{n+3} \cdot \frac{1}{5}$, unde $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculați:

a) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} + \frac{6}{\sqrt{3}}$;	b) $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$.
---	--
3. a) Dacă $\frac{3}{13} = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$, calculați $a_{2000} - a_{1000}$ și $a_1 + a_2 + \dots + a_{100}$.
 b) Dacă $\frac{41}{333} = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$, calculați $a_5 + a_{10} + a_{15} + \dots + a_{100}$.

4. a) Calculați suma dintre opusul și inversul numărului $\sqrt{5} - 2$.

b) Calculați suma inverselor următoarelor numere: $-1, 2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}$.

5. Determinați $x \in \mathbb{R}$ în fiecare dintre cazurile:

a) opusul numărului $2x - 3$ este 15;

b) inversul numărului $3x - 2$ este 5;

c) numărul $x^2 - x$ este inversabil.

6. Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor:

a) $3 - 2\sqrt{2}$ și $3 + 2\sqrt{2}$;

b) $\sqrt{10} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$ și $\sqrt{10} - \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

7. Se dau numerele: $a = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$, $b = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$, $c = 5(\sqrt{3} - \sqrt{2})$. Calculați:

a) $a + b + c$;

b) $a^2 + b^2 + c^2$;

c) $ab + bc + ca$.



8. Calculați:

a) $2, (3) + 7, (6)$;

b) $0, (3) + 0, 0(3) + 0, 00(3)$;

c) $1, 1(3) - 2, 07(27)$;

d) $\frac{3}{5} - 0, 1(3) + \frac{1}{7} - 0, (285714)$.

9. Calculați:

a) $5\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{5}\right) - 7\left(1 - \frac{5}{6} + \frac{11}{12}\right)$;

b) $\frac{(1, 5 - 0, 25 + 5, 8(3)) : 2, 5}{0, (6) \cdot 3, (3) - 0, 25 \cdot 2, 1(6)} - \frac{1}{11} \cdot \left(1 - 1 : \frac{3}{2}\right)$;

c) $1 - \left\{ \left[\frac{1}{12} - \frac{1}{16} - 7 : (-24) \right] : \left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} \right\} \cdot \left(-5\frac{1}{3}\right)$.

10. Determinați numerele reale x din egalitatea: $\frac{1}{2} \cdot \left\{ 3 - \frac{1}{2} \cdot \left[3 - \frac{1}{2} \cdot (x^2 - 1) \right] \right\} = 1$.

11. Calculați cu două zecimale exacte:

a) $\sqrt{3}$;

b) $\sqrt{2, 013}$;

c) $\sqrt{5, 71}$;

d) $\frac{\sqrt{5}}{4}$;

e) $\frac{\sqrt{39}}{3}$.

12. Calculați: $\frac{2, 8 + 5\frac{1}{2} : \left(3 + 0, 2 \cdot 2\frac{1}{2}\right) - \frac{2}{7} \cdot \sqrt{\frac{63}{175}}}{\left(5\frac{3}{7} \cdot 4\frac{1}{5} + 2, 45 : 4\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{2}{3} - \sqrt{1, 5625}} : 2\frac{4}{5}$.

13. Se consideră numerele reale a, b, x, y astfel încât $a - b = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$ și $x + y = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$.

Calculați $ax - by + ay - bx$.

14. Calculați:

a) $(2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 5\sqrt{5})(\sqrt{18} - \sqrt{12} - \sqrt{5})$;

b) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$;

c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{6 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{3 + \sqrt{3}}}$.

15. Arătați că:

a) $\sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}} = 2\sqrt{2}$; b) $\sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{7+4\sqrt{3}} = 4$.

16. Calculați:

a) $\left(\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}} - \sqrt{5}\right)^{-1} + \left(\sqrt{5} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

b) $\left(\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}\right)^{-2} \cdot (3,5+0,(6))$;

c) $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} - \frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$.

17. Arătați că $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{10}+\sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{10}-\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{3}} \in \mathbb{N}$.



18. Căturile obținute prin împărțirea numerelor $\frac{24}{11}$, $\frac{34}{13}$, $\frac{48}{7}$ la un număr rațional $r > 0$ sunt numere întregi. Aflați cel mai mare număr rațional r cu această proprietate.

19. Fie $a, b \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Calculați $\frac{a^2-ab+2b^2}{a^2+ab+3b^2}$.

20. a) Arătați că $\frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

b) Calculați suma

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{1}} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

c) Determinați $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $S_m = 0,75$.

Formule de calcul prescurtat. Identități (extindere)

În contextul operațiilor cu numere reale sunt foarte utile *formulele de calcul prescurtat*.

- 1. Factorul comun:** $ab + ac = a(b + c)$.
- 2. Binomul la pătrat:** $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
- 3. Diferența de pătrate:** $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.
- 4. Trinomul la pătrat:** $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$.
- 5. Binomul la cub:** $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$,
 $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$.
- 6. Suma de cuburi:** $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.
- 7. Diferența de cuburi:** $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Formulele 3, 6 și 7 admit următoarele generalizări:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}), \text{ unde } n \in \mathbb{N}, n \geq 2;$$

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}), \text{ unde } n \in \mathbb{N} \text{ este impar.}$$

Descompunerea trinomului de gradul al II-lea în factori de gradul I

Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, astfel încât $b^2 - 4ac \geq 0$. Dacă x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, atunci $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Exemple

1. Ecuația $x^2 - 3x + 2 = 0$ are soluțiile $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, deci $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.

2. Ecuația $4x^2 - 4x + 1 = 0$ are soluțiile $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$, deci

$$4x^2 - 4x + 1 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \frac{2x - 1}{2} \cdot \frac{2x - 1}{2} = (2x - 1)^2.$$

Descompunerea în factori a unei expresii polinomiale de grad cel puțin egal cu 3

Propoziție. Se consideră expresia

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \text{ unde } a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0.$$

a) Dacă $f(c) = 0$, $c \in \mathbb{R}$, atunci există $b_0, b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$f(x) = (x - c)(b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0).$$

b) Dacă $f(c) = 0$ și, în plus, $c, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, atunci $c \mid a_0$.

Demonstrație

a) Avem: $f(x) = f(x) - f(c) = a_1(x - c) + a_2(x^2 - c^2) + \dots + a_n(x^n - c^n)$.

Concluzia se obține având în vedere că

$$x^k - c^k = (x - c)(x^{k-1} + cx^{k-2} + c^2x^{k-3} + \dots + c^{k-1}).$$

b) Din $f(c) = 0$ rezultă $a_0 = -c(a_1 + a_2c + \dots + a_n c^{n-1})$, de unde $c | a_0$.

Exemplu. Vom descompune în factori expresia $f(x) = 2x^3 - x^2 - 5x - 2$.

Observăm că un divizor întreg al lui 2 care anulează expresia este 2. Prin urmare, $f(x) = (x-2)g(x)$. Pentru a determina $g(x)$, grupăm termenii expresiei $f(x)$ așa încât să putem da factor comun pe $x-2$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \underbrace{2x^3 - 4x^2} + \underbrace{3x^2 - 6x} + \underbrace{x - 2} = \\ &= 2x^2(x-2) + 3x(x-2) + x-2 = (x-2)(2x^2 + 3x + 1). \end{aligned}$$

Deci $g(x) = 2x^2 + 3x + 1$. La fel, din faptul că $g(-1) = 0$, deducem că $g(x)$ are în descompunere factorul $x+1$; avem

$$g(x) = \underbrace{2x^2 + 2x} + \underbrace{x + 1} = 2x(x+1) + x+1 = (x+1)(2x+1).$$

În concluzie, $f(x) = (x-2)(x+1)(2x+1)$.



1. Arătați că, oricare ar fi numerele reale a, b, c , au loc egalitățile:

a) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

c) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$;

b) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;

d) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

2. Numerele reale a și b îndeplinesc condițiile $a+b=6$ și $ab=1$. Calculați:

a) $a^2 + b^2$;

b) $a^3 + b^3$;

c) $a^4 + b^4$;

d) $a-b$.

3. Arătați că, oricare ar fi numerele întregi a, b, c, d , există două numere întregi x și y astfel încât $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = x^2 + y^2$.

4. Fie $x, y \in \mathbb{Q}$, $x+y \neq 0$ și $z = \frac{xy}{x+y}$. Arătați că $x^2 + y^2 + z^2$ este pătratul unui număr rațional.

5. Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Calculați:

a) $a^3 + b^3$ știind că $a+b=10$ și $ab=1$;

b) $a^2 + b^2$ știind că $a+b=4$ și $a^3 + b^3 = 52$;

c) $a^3 - b^3$ știind că $a-b=2$ și $ab=1$.

6. Fie x un număr real nenul. Calculați:

a) $x^4 + \frac{1}{x^4}$ în funcție de $a = x + \frac{1}{x}$;

b) $x^3 - \frac{1}{x^3}$ în funcție de $b = x - \frac{1}{x}$.

7. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $a-b=1$ și $a^3 - b^3 = 37$. Calculați $a^2 + b^2$.

8. Calculați:

a) $\left(\frac{a-b}{a} - \frac{a+b}{b} + \frac{3a^2 + b^2}{2ab} + \frac{b}{a} \right) \cdot \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{(a+b)^2 + (a-b)^2}$, unde $a, b \in \mathbb{R}^*$;

b) $\frac{1}{a^3} \left\{ \left[a - \left(\frac{1}{a+1} - \frac{3}{a^3+1} + \frac{3}{a^2-a+1} \right) \left(a - \frac{2a-1}{a+1} \right) \right] \cdot (a^2 + a + 1) + 1 \right\}, a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\};$

c) $\frac{a^3 - b^3}{a^3 + a^2b + ab^2} : \left[\left(a + b - \frac{ab}{a+b} \right) : \left(\frac{a}{a+b} - \frac{b}{b-a} + \frac{ab}{a^2 - b^2} \right) \right],$ unde $a, b \in \mathbb{R}^*, a \neq \pm b.$

9. Descompuneți în factori de forma $ax + b$:

a) $x^2 - x - 2;$ b) $2x^2 + 5x + 3;$ c) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6;$
 d) $2x^3 + x^2 - 5x + 2;$ e) $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2;$ f) $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4.$

10. a) Descompuneți în factori expresiile

$A(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ și $B(x) = x^3 - 2x^2 - 3x.$

b) Determinați numerele reale x pentru care fracția $F(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ are valoarea definită.

c) Determinați numerele întregi k pentru care $F(k) \in \mathbb{Z}.$



11. Se consideră expresia $E(x) = x^4 - x^3 - 6x^2 + 4x + 8.$

a) Calculați $E(-2)$ și $E(2).$

b) Simplificați fracția $F(x) = \frac{x^4 - x^3 - 6x^2 + 4x + 8}{x^4 - 16}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}.$

12. Fie expresia $E(x) = \left(\frac{x^2 + 2}{x^3 - 1} + \frac{x}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{x - 1} \right) \cdot \left(\frac{x^2}{x^2 - 1} + \frac{1}{x - 1} \right), x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$

a) Arătați că $E(x) = \frac{1}{x + 1}.$

b) Calculați $E(1) \cdot E\left(\frac{1}{2}\right) \cdot E\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \dots \cdot E\left(\frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}^*.$

13. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât $x + y + z = 1$ și $(x + y)(y + z)(z + x) = 14.$ Calculați $xy + yz + zx - xyz.$

14. Fie $x, y \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $x^2 - 5xy + 6y^2 = 0.$ Determinați $\frac{x}{y}.$

15. Fie $x, y, z \in \mathbb{Q}$ astfel încât $xy + yz + zx = 1.$ Arătați că $(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2)$ este pătratul unui număr rațional.

16. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ cu $a + b + c = 0.$ Arătați că

$$\frac{1}{-a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{a^2 - b^2 + c^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} = 0.$$

17. Arătați că, oricare ar fi numerele reale $a, b, c,$ au loc egalitățile:

a) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca);$

b) $(a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3) = 3(a + b)(b + c)(c + a).$

18. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați că $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$.

b) Dacă, în plus, n este impar, arătați că

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - x^{n-4}y^3 + \dots - xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

c) Folosind a), demonstrați că $(a + b)^n = a^n + Mb = Ma + b^n$ pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$.

d) Arătați că, oricare ar fi $m \in \mathbb{N}$, numărul $2^{3m+1} + 3 \cdot 5^{2m+1}$ este divizibil cu 17.

19. Numărul real $a > 0$ îndeplinește condiția $a^2 + \frac{1}{a^2} = 14$. Calculați $a^5 + \frac{1}{a^5}$.

20. Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $abc = 1$. Arătați că $\frac{a}{1+a+ab} + \frac{b}{1+b+bc} + \frac{c}{1+c+ca} = 1$.

21. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Demonstrați egalitățile, descompunând membrul stâng în produs:

a) $a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 3abc = (a+b+c)(ab+bc+ca)$;

b) $a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 2abc = (a+b)(b+c)(c+a)$;

c) $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = -(a-b)(b-c)(c-a)$;

d) $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) = -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$;

e) $a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3 = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

22. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Arătați că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, are loc egalitatea:

$$(x-a)^2(b-c) + (x-b)^2(c-a) + (x-c)^2(a-b) = -(a-b)(b-c)(c-a).$$

23. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, $a \neq b \neq c \neq d$. Demonstrați egalitățile:

a) $\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} = 0$;

b) $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} = 1$;

c) $\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} = a + b + c$;

d) $\frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-c)(b-a)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)} = \frac{1}{abc}$.

24. Numerele reale a, b, c îndeplinesc condițiile

$$(a+b)(b+c)(c+a) \neq 0 \text{ și } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1.$$

Demonstrați egalitățile:

a) $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$;

b) $\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} + a^2 + b^2 + c^2 = 0$.

25. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq b \neq c \neq a$, astfel încât $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$. Arătați că

$$\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0.$$

26. Arătați că, dacă x, y, z sunt numere raționale distincte, atunci numărul

$$s = \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}$$

este pătratul unui număr rațional.

27. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Demonstrați egalitatea, descompunând membrul stâng în produs:

$$(a+b)(b+c)(c+a) + abc = (a+b+c)(ab+bc+ca).$$

28. Arătați că, dacă numerele reale pozitive a, b, c îndeplinesc condiția $ab+bc+ca=1$, atunci

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} = \frac{2}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}}.$$

29. Demonstrați identitatea lui *Catalan*:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

30. Demonstrați următoarele egalități de numere reale:

$$a) (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = (a_1b_1 + a_2b_2)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2;$$

$$b) (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2.$$

Generalizare (identitatea lui *Lagrange*). Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, atunci

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$